$\mathbb{P}^1$-母题同伦论

唐珑珂

2024 年 8 月 11 日

上同调理论

代数几何中有很多上同调理论. 例如对代数闭域 k 上光滑紧合概形 X, 我们有

- 代数 de Rham 上同调 $\mathrm{H}^*_{\mathrm{dR}}(X/k)$
- ℓ 进平展上同调 $\mathrm{H}^*_{\text{ét}}(X;\mathbb{Z}_\ell)$

当 $k=\mathbb{C}$ 时有

- Betti 上同调 $\mathrm{H}^*_{\mathrm{sing}}(X(\mathbb{C});\mathbb{Z})$

当 $\mathrm{char}(k)=p$ 时有

- 晶体上同调 $\mathrm{H}^*_{\mathrm{crys}}(X/\mathrm{W}(k))$

Grothendieck 因而提出母题的设想.

Grothendieck 母题

Grothendieck 设想 Abel 范畴 $\mathsf{M}(k)$ 以及 $\mathsf{M}(k)$ 值的上同调理论，使得

- 它是万有的，即每个上同调理论都穿过它；
- 它满足上同调理论该满足的性质，如 Künneth 公式；支持上同调理论该支持的操作，如取代数圈的同调类；
- ……

还提出一系列相关猜想，在此按下不表.

导出范畴

后来的数学实践 (Deligne、Verdier、Voevodsky、Lurie、Scholze、⋯⋯) 表明：不应取上同调，应当保留链复形 $\Gamma_?(X)$ 本身，而且要作为导出 $(\infty, 1)$-范畴的对象保留，便于理论操作.

- 非域系数的 Künneth 公式
- 下降：如 $U \to X$ 是 (Zariski、平展、h、⋯⋯) 覆盖，则

$$\Gamma_?(X) = \lim_{n \in \boldsymbol{\Delta}} \Gamma_?(U^{\times_X n})$$

Voevodsky 相应地提出母题同伦范畴、母题导出范畴.

从今以后，范畴都指 $(\infty, 1)$-范畴. k 可以是一般的环或拟紧拟分离概形，不必是代数闭域.

$\mathbf{A}^1$-同伦论 (Voevodsky)

一些上同调理论满足 $\mathbf{A}^1$-不变性: $\Gamma_?(X \times \mathbf{A}^1) = \Gamma_?(X)$

- ℓ 进平展上同调
- 特征 0 代数 de Rham 上同调
- Betti 上同调

因而定义母题空间范畴

$$\mathsf{H}(k) := \{\mathcal{F} \colon \mathsf{Sm}_k^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Ani} \mid \mathcal{F} \in \mathsf{Sh}_{\mathrm{Nis}}(\mathsf{Sm}_k), \mathcal{F}(- \times \mathbf{A}^1) = \mathcal{F}(-)\}$$

带 Yoneda 函子 $\mathsf{Sm}_k \to \mathsf{H}(k)$.

$\mathbf{A}^1$-同伦论 (Voevodsky)

设范畴 $\mathcal{C}$ 有任意极限，$F\colon \mathsf{Sm}_k^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}$ 满足

- Nisnevich 下降
- $\mathbf{A}^1$-不变性

则 F 有唯一的保极限延拓

$$F\colon \mathsf{H}(k)^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}$$

Tate 扭转

很多上同调理论满足 $(\mathbf{P}^1, \infty)$ 的约化上同调 $\mathrm{fib}(\Gamma_?(\mathbf{P}^1) \to \Gamma_?(\infty))$ 是 $\otimes$-可逆对象

- 代数 de Rham 上同调: $\Gamma_{\mathrm{dR}}(\mathbf{P}^1, \infty) = \mathcal{O}[-2]$
- ℓ 进平展上同调: $\Gamma_{\text{ét}}((\mathbf{P}^1, \infty); \mathbb{Z}_\ell) = \mathbb{Z}_\ell(-1)[-2]$
- Betti 上同调: $\Gamma_{\mathrm{sing}}((\mathbf{P}^1, \infty); \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[-2]$
- 晶体上同调: $\Gamma_{\mathrm{crys}}((\mathbf{P}^1, \infty)/\mathrm{W}(k)) = \mathrm{W}(k)[-2]$

因而 Voevodsky 定义母题谱范畴

$$\mathsf{SH}(k) := \mathsf{H}(k)_*[(\mathbf{P}^1, \infty)^{-1}]$$

即 $(\mathsf{H}(k)_*, \wedge)$ 之下初始的可表现对称幺半范畴, 满足 $(\mathbf{P}^1, \infty) \in \mathsf{H}(k)_*$ 的像可逆. 它是稳定无穷范畴, 带 Yoneda 函子 $\mathsf{Sm}_k \to \mathsf{SH}(k)$.

Tate 扭转

设对称幺半稳定无穷范畴 $\mathcal{C}$ 有任意极限, $F\colon \mathsf{Sm}_k^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}$ 满足

- Nisnevich 下降
- $\mathbf{A}^1$-不变
- Künneth 公式 $F(X \times Y) = F(X) \otimes F(Y)$
- 约化同调 $F(\mathbf{P}^1, \infty)$ 是可逆对象

则 F 有唯一的保极限松幺半延拓

$$F\colon \mathsf{SH}(k)^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}$$

故 $\mathsf{SH}(k)$ 带 Yoneda 函子可视为满足上述条件的万有上同调理论.

Voevodsky 另有母题导出范畴 $\mathsf{DM}(k)$, 是在上面的基础上要求有限移送, 在此按下不表. Rust、Suslin、Voevodsky 等人用这些理论证明了 Milnor K 群的 Bloch–Kato 猜想.

SH(k) 中的构造和命题 (Morel–Voevodsky)

于是 SH(k) 中的构造和命题可以应用到满足上述条件的上同调理论.

- 管状邻域定理: $Y \to X$ 是 Sm_k 中的闭浸入. 则在 SH(k) 中

$$\frac{X}{X \setminus Y} \cong \frac{\mathrm{N}_{Y/X}}{\mathrm{N}_{Y/X} \setminus 0} =: \mathrm{Th}_Y(\mathrm{N}_{Y/X})$$

  由于 Thom 谱 $\mathrm{Th}_Y(\mathrm{N}_{Y/X})$ 的上同调是 Y 的上同调的 Tate 扭转, 这样就得到上同调理论的 Gysin 映射

$$\Gamma(Y)(?) \cong \Gamma(X, X \setminus Y) \to \Gamma(X)$$

- Atiyah 对偶: 任意 $X \in \mathrm{Sm}_k$ 在 SH(k) 中都可对偶. 当 X 紧合时, 对偶为 $\mathrm{Th}_X(-\mathrm{T}_{X/k})$. 这样就得到上同调理论的 Poincaré 对偶.

非 $\mathbf{A}^1$-不变性

p 进几何促使我们研究一批没有 $\mathbf{A}^1$-不变性的上同调:

- Hodge 上同调
- 特征 p 代数 de Rham 上同调
- 晶体上同调
- Hodge–Tate 上同调
- 棱镜上同调

希望放弃 $\mathbf{A}^1$-不变性, 保留 $(\mathbf{P}^1, \infty)$-可逆性. 单单 $(\mathbf{P}^1, \infty)$-可逆性太弱, 不足以做同伦论. 但这些上同调都满足光滑爆破切除, 即对 Sm_k 中的闭浸入 $Y \to X$, 下面的方形图表在上同调上是拉回:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{P}(\mathcal{N}_{Y/X}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Bl}_Y(X) \arrow[d] \\ Y \arrow[r] & X \end{tikzcd} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{tikzcd} \Gamma_?(\mathbf{P}(\mathcal{N}_{Y/X})) & \Gamma_?(\mathrm{Bl}_Y(X)) \arrow[l] \\ \Gamma_?(Y) \arrow[u] & \Gamma_?(X) \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

$\mathbf{P}^1$-母题谱 (Annala–Iwasa)

模仿 $\mathrm{SH}(k)$ 定义 $\mathbf{P}^1$-母题谱范畴. 考虑所有函子 $\mathcal{F}\colon \mathrm{Sm}_k^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ani}$, 满足:

- Nisnevich 下降
- 光滑爆破切除

这样的函子构成的范畴记作 $\mathrm{H}_{\mathrm{bu}}(k)$. 然后定义

$$\mathrm{MS}^{\mathrm{un}}(k) := \mathrm{H}_{\mathrm{bu}}(k)_*[(\mathbf{P}^1, \infty)^{-1}]$$

它不是稳定无穷范畴, 故取在它之下初始的可表现稳定无穷范畴

$$\mathrm{MS}(k) := \mathrm{MS}^{\mathrm{un}}(k) \otimes \mathrm{Sp} = \mathrm{MS}^{\mathrm{un}}(k)[(\mathrm{S}^1)^{-1}]$$

依定义我们有一列函子

$$\mathrm{Sm}_k \to \mathrm{Sh}_{\mathrm{Nis}}(\mathrm{Sm}_k) \to \mathrm{H}_{\mathrm{bu}}(k) \to \mathrm{H}_{\mathrm{bu}}(k)_* \to \mathrm{MS}^{\mathrm{un}}(k) \to \mathrm{MS}(k)$$

其中第一个是 Yoneda 嵌入.

MS(k) 中的构造和命题 (Annala–Hoyois–Iwasa)

于是 MS(k) 中的构造和命题可以应用到满足上述条件的上同调理论.

- $0, 1 \colon * \to \mathbf{P}^1$ 在 MS(k) 中典范地同伦. 事实上 $\mathbf{P}^1$ 的自映射 $+1$ 在 MS(k) 中典范地同伦于 id.
- 对局部自由层 $\mathcal{E} \in \mathrm{Vect}_k$, 其 Thom 谱

$$\mathrm{Th}_k(\mathcal{E}) := \frac{\mathbf{P}(\mathcal{E} \oplus \mathcal{O})}{\mathbf{P}(\mathcal{E})} \in \mathsf{MS}(k)$$

是 MS(k) 中的可逆对象, 而且 $\mathrm{Th}_k \colon (\mathrm{Vect}_k, \oplus) \to \mathrm{Pic}(\mathsf{MS}(k), \otimes)$ 是交换幺半群同态. 由于 Pic 是群, 它自然延拓为交换群同态

$$\mathrm{Th}_k \colon \mathrm{K}(k) \to \mathrm{Pic}(\mathsf{MS}(k), \otimes)$$

Thom 谱

我们来看看为什么 $\mathrm{Th}(\mathcal{O}\oplus\mathcal{O})=\mathrm{Th}(\mathcal{O})\otimes\mathrm{Th}(\mathcal{O})$.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Th}(\mathcal{O})\otimes\mathrm{Th}(\mathcal{O}) &= (\mathbf{P}^1,\infty)\wedge(\mathbf{P}^1,\infty)\\
&= \frac{\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1}{\mathbf{P}^1\times\infty\cup\infty\times\mathbf{P}^1} = \frac{\mathrm{Bl}_{(\infty,\infty)}(\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1)}{\mathbf{P}^1\times\infty\cup E_{(\infty,\infty)}\cup\infty\times\mathbf{P}^1}\\
&= \frac{\mathrm{Bl}_{[1:0:0],[0:1:0]}(\mathbf{P}^2)}{E_{[1:0:0]}\cup\mathbf{P}^1\cup E_{[0:1:0]}} = \mathbf{P}^2/\mathbf{P}^1 = \mathrm{Th}(\mathcal{O}\oplus\mathcal{O})
\end{aligned}
$$

注意上面的推导不足以证明 Th 是交换幺半群同态，因为没有给出高阶同伦连贯性. 但这没有本质困难.

$0,1:*\to\mathbf{P}^1$ 同伦的证明过于巧妙，在此略去.

Gysin 映射 (Tang)

定理

$Y \to X$ 是 Sm_k 中的闭浸入. 则 $\mathrm{MS}(k)$ 中有典范的 *Gysin* 映射

$$X \to \mathrm{Th}_Y(\mathcal{N}_{Y/X})$$

由于 Thom 谱 $\mathrm{Th}_Y(\mathcal{N}_{Y/X})$ 的上同调是 Y 的上同调的 Tate 扭转, 这样就得到上同调理论的 Gysin 映射

$$\Gamma(Y)(?) \to \Gamma(X)$$

这个构造是纯母题论的, 故自动对上同调理论之间的映射有函子性.

Gysin 映射的构造 (Tang)

考虑闭浸入的映射 $Y \to X$ 打到 $Y = Y \times 0 \to X \times \mathbf{P}^1$. 使用光滑爆破切除，得 MS$(k)$ 中纤维方块的映射

$$
\begin{array}{ccc} \mathbf{P}(\mathcal{N}_{Y/X}) & \longrightarrow & \mathrm{Bl}_Y(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & X \end{array}
\quad \longrightarrow \quad
\begin{array}{ccc} \mathbf{P}(\mathcal{N}_{Y/X} \oplus \mathcal{O}_Y) & \longrightarrow & \mathrm{Bl}_Y(X \times \mathbf{P}^1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & X \times \mathbf{P}^1 \end{array}
$$

取余纤维，得纤维方块 (其中 X 视为 $X \times 0$ 含入 $X \times \mathbf{P}^1$)

$$
\begin{array}{ccc} \mathrm{Th}_Y(\mathcal{N}_{Y/X}) & \longrightarrow & \dfrac{\mathrm{Bl}_Y(X \times \mathbf{P}^1)}{\mathrm{Bl}_Y(X)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \dfrac{X \times \mathbf{P}^1}{X} \end{array}
$$

Gysin 映射的构造 (Tang)

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Th}_Y(\mathcal{N}_{Y/X}) \arrow[r] \arrow[d] & \dfrac{\mathrm{Bl}_{Y\times 0}(X\times\mathbf{P}^1)}{\mathrm{Bl}_{Y\times 0}(X\times 0)} \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & \dfrac{X\times\mathbf{P}^1}{X\times 0} \end{tikzcd}$$

考虑映射

$$X = X\times 1 \hookrightarrow \mathrm{Bl}_{Y\times 0}(X\times\mathbf{P}^1) \to \frac{\mathrm{Bl}_{Y\times 0}(X\times\mathbf{P}^1)}{\mathrm{Bl}_{Y\times 0}(X\times 0)}$$

两个含入映射 $0, 1\colon X \to X\times\mathbf{P}^1$ 的同伦给出上述映射复合到 $\dfrac{X\times\mathbf{P}^1}{X\times 0}$ 的零伦, 从而给出 X 到 $\mathrm{Th}_Y(\mathcal{N}_{Y/X})$ 的映射.

Gysin 映射的复合 (Tang)

$Z \to Y \to X$ 是 Sm_k 中的闭浸入. 则其 Gysin 映射在 $\mathrm{MS}(k)$ 中有交换图

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr] \arrow[d] & & \mathrm{Th}_Y(\mathcal{N}_{Y/X}) \arrow[d] \\
\mathrm{Th}_Z(\mathcal{N}_{Z/X}) \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Th}_Z(\mathcal{N}_{Y/X}) \otimes_Z \mathrm{Th}_Z(\mathcal{N}_{Z/Y}) &
\end{tikzcd}$$

证明非常麻烦, 高阶连贯性就更加麻烦. 需要一段时间把它写明白.

Atiyah 对偶 (Annala–Hoyois–Iwasa)

定理

$X \in \mathsf{Sm}_k$ 是射影概形. 则 X 在 $\mathsf{MS}(k)$ 中可对偶, 对偶为 $\mathrm{Th}_X(-\mathrm{T}_{X/k})$.

证明.

见文章《Atiyah duality for motivic spectra》. 大致步骤如下:

- 定理对 $\mathbf{P}^n$ 成立. 这是因为 $\mathbf{P}^n$ 有滤链

$$\mathbf{P}^0 \to \mathbf{P}^1 \to \cdots \to \mathbf{P}^n$$

  其每个分次项 $\mathbf{P}^{i+1}/\mathbf{P}^i = \mathrm{Th}(\mathcal{O}^{\oplus i})$ 都可逆.
- 取闭浸入 $X \hookrightarrow \mathbf{P}^n$, 用 Gysin 映射造出对偶数据, 再验证对偶. $\square$

这样就得到光滑射影概形在各种上同调理论下的 Poincaré 对偶.

$\mathbf{A}^1$-余局部化 (Lurie)

依定义，$\mathsf{SH}(k)$ 是 $\mathsf{MS}(k)$ 中 $\mathbf{A}^1$-不变者构成的满子范畴，即

$$\mathsf{SH}(k) = \{H \in \mathsf{MS}(k) \mid \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{A}^1, H) = H\}$$

由此不难看出含入函子有两边伴随．左伴随就是 $\mathbf{A}^1$-局部化，记作 $\mathrm{L}_{\mathbf{A}^1}$．右伴随就是 $\mathbf{A}^1$-余局部化，记作 $(-)^{\log}$．

定理

设 $H \in \mathsf{MS}(k)$ 是 $\mathbf{1}_{\mathsf{SH}(k)}$-模，如棱镜上同调．则 $H^{\log}$ 给出 H 对应的 $\log$ 上同调，且不依赖紧化．具体地说，设 $U \in \mathsf{Sm}_k$ 有好紧化 $(X, \partial X)$，其中 X 光滑射影，$\partial X = \bigcup_{i=1}^n D_i$ 是横截相交光滑除子的并，$U = X \setminus \partial X$．则

$$H^{\log}(U) = \mathrm{cofib}_{I \subseteq \{1,\dots,n\}} H(\mathrm{Th}_{D_I}(\mathcal{N}_{D_I/X}))$$

其中 $D_I = \bigcap_{i \in I} D_i$．比如 $n = 1$ 时 $U = X \setminus D$，此时

$$H^{\log}(U) = \mathrm{cofib}(H(\mathrm{Th}_D(\mathcal{N}_{D/X})) \to H(X))$$

推广

- 对于正则闭浸入 $Y \to X$, 应当可以定义 $\mathsf{MS}(X, Y)$ 及 Thom 构造

$$\mathrm{Th}_{(X,Y)} \colon \mathrm{K}(X)/\mathrm{K}(Y) \to \mathrm{Pic}(\mathsf{MS}(X, Y))$$

- 对于超量相交图表也应可以定义类似的 MS; 如有正则闭浸入 $Z \to Y \to X$, 则应有

$$\mathsf{MS}(\mathrm{Bl}_Z(X), \mathbf{P}(\mathcal{N}_{Z/X}) \cup_{\mathbf{P}(\mathcal{N}_{Z/Y})} \mathrm{Bl}_Z(Y)) \cong \mathsf{MS}(X, Y)$$

- 和 Binda–Park–Østvær 的对数母题同伦论比较?